Análisis Matemático II — UTN-FRBA

Primer cuatrimestre de 2025 — Primer Parcial (16/05/2025)

Apellido y nombre: Curso:

T1	T2	P1	P2	P3	P4	Califcación

Ejercicios teóricos

T1. a) Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\mathbf{x}_0$. Explique que relación hay entre la diferenciabilidad, las derivadas direccionales y el gradiente de la función en $\mathbf{x}_0$.

b) Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Calcule $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial \breve{v}}(0,0)$ con $\breve{v} = (1/2,\ \sqrt{3}/2)$. La función, ¿es diferenciable en $(0,0)$? **Justifique su respuesta**

T2. a) Dada la función $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, de condiciones suficientes que aseguren que la ecuación $F(x,y,z) = a$ defina implícitamente una función $z = f(x,y)$ en un entorno de $\mathbf{x}_0$.

b) La ecuación $x^2z - yz^2 + z^3 = 3$, ¿define implícitamente una función $z = f(x,y)$ en un entorno de $\mathbf{x}_0 = (1,-1,1)$. Si la respuesta es afirmativa, halle una ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto $(1,-1,f(1,-1))$.

Ejercicios prácticos

P1. Halle la solución de $y' - 2y = 4xe^{2x}$ que verifica $y(0) = -2$.

P2. Analice la existencia de derivadas en distintas direcciones de la función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x-y}, & \text{si } x-y \neq 0, \\ x+y^2, & \text{si } x-y=0. \end{cases}$ en el origen.

P3. Sean $\vec{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función C^1 tal que $D\vec{f}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $z = g(x,y)$ la función definida implícitamente por la ecuación $2y^3 - xy^2 - 3e^{x+yz} + \ln(z) = 0$ en un entorno de $(-1,1,z_0)$. Determine la **dirección** de derivada direccional máxima de $h = g \circ \vec{f}$ en el origen sabiendo que $\vec{f}(0,0) = (-1,1)$.

P4. Verifique que $\mathbf{P} = (0,3,0)$ es un punto regular de la curva C de ecuación $(x,y,z) = (t^2-t,\ 2t+1,\ t^2-1)$; si lo es, dado que también es un punto simple, halle una ecuación del plano normal a C en $\mathbf{P}$ y encuentre la intersección de este plano con el eje z.

Para aprobar los TP, deben estar bien al menos dos ejercicios prácticos (los teóricos no son tenidos en cuenta) esto equivale a una calificación de 6. Para aspirar a aprobación directa es necesario tener al menos cuatro ejercicios bien, uno de ellos un teórico. Esto equivale a una calificación de 8D

T1 a) Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\bar{X}_0$

Explicar qué relación hay entre diferenciabilidad, las derivadas direccionales y el gradiente de la función en $\bar{X}_0$

$$f'(\bar{X}_0, \breve{u}) \underset{\uparrow}{=} \nabla f(\bar{X}_0) \cdot \breve{u}$$

f es diferenciable

Si f es diferenciable entonces la derivada direccional en $\bar{X}_0$ en la dirección $\breve{u}$ es igual al producto escalar entre el gradiente evaluado en $\bar{X}_0$ por el versor $\breve{u}$

b) Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Calcular $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(0,0)$ con $\breve{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

La función ¿es diferenciable en $(0,0)$?

Hallo la función $\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(0,0)$ $\forall \breve{v} \in \mathbb{R}^2 / \breve{v} = (a,b)$ con $a^2+b^2=1$

$$\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f((0,0)+h\breve{v}) - \overset{0}{f(0,0)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cancel{h}} \cdot \frac{\cancel{h}ah^2b^2}{h^2a^2+h^2b^2} = \lim_{h\to 0} \frac{a\cancel{h^2}b^2}{\cancel{h^2}\underbrace{(a^2+b^2)}_{1}} = ab^2$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(0,0) = ab^2}$$

Si fuese diferenciable $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \breve{v} = (f'_x, f'_y)(a,b)$
$= af'_x + bf'_y \neq ab^2$ $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$

$\boxed{f \text{ NO es diferenciable en } (0,0)}$

$f'_x(0,0) = f'((0,0),(1,0)) = 0$ ← $a=1, b=0$

$f'_y(0,0) = f'((0,0)(0,1)) = 0$ → $b=0$

$\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(0,0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{3}{8} = \frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(0,0)}$

$\breve{v} = \left(\underset{\uparrow a}{\frac{1}{2}}, \underset{\uparrow b}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$

T2 a) Dada la función $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, ¿$\overline{X_0}\in\mathbb{R}^3$ dé condiciones suficientes que aseguren que la ecuación $F(x,y,z)=a$ define implícitamente una función $z=f(x,y)$ en un entorno de $\overline{X_0}$

Teorema de la Función Implícita (TFI)

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ F\in C^1 \qquad F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R} \\ \bullet\ F'_z(\overline{X_0})\neq 0 \\ \bullet\ F(\overline{X_0})-a=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f'_x(x_0,y_0)=-\dfrac{F'_x(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)} \\ f'_y(x_0,y_0)=-\dfrac{F'_y(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)} \end{array}$$

b) La ecuación $x^2z-yz^2+z^3=3$ ¿define implícitamente una función $z=f(x,y)$ en un entorno de $x_0=(1,-1,1)$?
Si la respuesta es afirmativa, hallar una ecuación del plano tang al gráfico de f en $(1,-1,f(1,-1))$ $\to z=f(1,1)=1$

$F(x,y,z)=x^2z-yz^2+z^3-3 \longrightarrow F(1,-1,1)=0$ ✓

$F'_z(x,y,z)=x^2-2yz+3z^2 \longrightarrow F'_z(1,-1,1)=6\neq 0$ ✓

F es polinomio $\Rightarrow F\in C^1$ ✓

Se cumplen las hipótesis del TFI ✓

El plano tang a gráf de f en $(1,-1,1)$:

$$z=\underbrace{f(1,-1)}_{1}+\underbrace{f'_x(1,-1)}_{-1/3}(x-1)+\underbrace{f'_y(1,-1)}_{-1/6}(y+1)$$

$$f'_x(1,-1)=-\frac{F'_x(1,-1,1)}{F'_z(1,-1,1)}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$$

$$f'_y(1,-1)=-\frac{F'_y(1,-1,1)}{F'_z(1,-1,1)}=-\frac{1}{6}$$

$F'_x=2xz \to F'_x(1,-1,1)=2$

$F'_y=z^2 \to F'_y(1,-1,1)=1$

$$z=1-\frac{1}{3}(x-1)-\frac{1}{6}(y+1) \longrightarrow \boxed{z=-\frac{x}{3}-\frac{y}{6}+\frac{7}{6}}$$

NOTA

AM2	1º parcial Candelas - Pavón	HOJA Nº 2/3 FECHA 16-5-25

(P1) Hallar la solución de $y' - 2y = 4xe^{2x}$ que verifica $y(0) = -2$

Hallo S.H) $y' - 2y = 0$

$\frac{dy}{dx} = 2y \longrightarrow \frac{1}{y} dy = 2\, dx$

integro m.a.m $\ln(y) = 2x + C$ $A = e^c$

$\boxed{y_H = e^{2x} \cdot A}$

SP) Propongo: $y_p = Bxe^{2x} \rightarrow y' = Be^{2x} + Bx2e^{2x}$

$y' - 2y = 4xe^{2x}$

$B\cancel{e^{2x}} + \cancel{Bx2e^{2x}} - \cancel{2Bxe^{2x}} = 4x\cancel{e^{2x}} \Rightarrow B = 4x \rightarrow$ Absurdo

$\boxed{y_p = Bx^2 e^{2x} + Cxe^{2x}}$

$\boxed{y'p = 2Bxe^{2x} + Bx^2 2e^{2x} + Ce^{2x} + Cx2e^{2x}}$

$y' - 2y = 4xe^{2x}$

$\cancel{e^{2x}}(2Bx + Bx^2 2 + C + Cx) - 2.\cancel{e^{2x}}(Bx^2 + Cx) = 4x\cancel{e^{2x}}$

$x^2 \underbrace{(2B - 2B)}_{0} + x \underbrace{(2B + C - 2C)}_{4} + \underbrace{C}_{0} = 4x$ $\rightarrow x^2$ coef 0 término ind $= 0$

$2B - C = 4$ $C = 0$

$\rightarrow B = 2$

$\boxed{y_p = 2x^2 e^{2x}}$

$y_G = Ae^{2x} + 2x^2 e^{2x}$

$y(0) = -2 = Ae^0 + 0 \Rightarrow A = -2$

$$\boxed{y = -2e^{2x} + 2x^2 e^{2x}}$$

NOTA

P2) Analizar las derivadas en distintas direcciones de la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x-y} & \text{si } x-y \neq 0 \\ x+y^2 & \text{si } x-y=0 \end{cases}$$

en el origen

$\vec{u} = (a,b) \qquad a^2+b^2=1$

$$f'((0,0),\vec{u}) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h\vec{u}) - \overbrace{f(0,0)}^{0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb)}{h} =$$

$\boxed{\text{si } a-b\neq 0}$ $$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{h^2a^2+h^2b^2}{ha-hb} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cancel{h}} \frac{\cancel{h^2}\overbrace{(a^2+b^2)}^{1}}{\cancel{h}(a-b)}$$

$$\boxed{f'((0,0),\vec{u}) = \frac{1}{a-b} \quad \text{si } a-b\neq 0}$$

$\boxed{\text{si } a-b=0}$ $$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} (ha+h^2b^2) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cancel{h}} \cancel{h}(a+\overbrace{hb^2}^{\to 0}) = a$$

$$\boxed{f'((0,0),\vec{u}) = a \quad \text{si } a-b=0}$$

$$\boxed{f'((0,0),\vec{u}) = \begin{cases} \dfrac{1}{a-b} & \text{si } a-b\neq 0 \\ a & \text{si } a-b=0 \end{cases}}$$

NOTA

AM2	1° parcial Condeiras - Pavón	HOJA N° 3/3 FECHA 16-5-25

(P3) Sean $\bar{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función C^1 tal que $D\bar{f}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $z = g(x,y)$ la función definida implícitamente por la ecuación $2y^3 - xy^2 - 3e^{x+yz} + \ln(z) = 0$ en un entorno de $(-1,1,z_0)$. Determinar la dirección de derivada direccional máxima de $h = g \circ \bar{f}$ en el origen que $\bar{f}(0,0) = (-1,1)$

$$F(x,y,z) = 2y^3 - xy^2 - 3e^{x+yz} + \ln(z) \xrightarrow{x\,TFI} F(-1,1,z_0) = 0 \quad \boxed{z_0 = 1}$$

$$F'_x = -y^2 - 3e^{x+yz} \longrightarrow F'_x(-1,1,1) = -4$$

$$F'_y = 6y - 2xy - 3e^{x+yz} \cdot z \Rightarrow F'_y(-1,1,1) = 5$$

$$F'_z = -3e^{x+yz} \cdot y + \frac{1}{z} \longrightarrow F'_z(-1,1,1) = -2$$

$$g'_x(-1,1) = -\frac{F'_x(-1,1,1)}{F'_z(-1,1,1)} = -\frac{-4}{-2} = \boxed{-2 = g'_x(-1,1)}$$

$$g'_y(-1,1) = -\frac{F'_y(-1,1,1)}{F'_z(-1,1,1)} = -\frac{5}{-2} = \boxed{\frac{5}{2} = g'_y(-1,1)}$$

$$h = g \circ \bar{f} \longrightarrow h(0,0) = g(\bar{f}(0,0))$$

$$Dh(0,0) = Dg(\bar{f}(0,0))\, D\bar{f}(0,0) =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 5/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \end{bmatrix}$$

h es diferenciable $\Rightarrow h'((0,0),\vec{v})\big|_{max}$ se da en $\vec{v} = \nabla h(0,0)$

$$\boxed{\vec{v} = (-2, -5)}$$

$$\check{v} = \left(\frac{-2}{\sqrt{29}}, \frac{-5}{\sqrt{29}}\right)$$

NOTA

(P4) Verificar que $P=(0,3,0)$ es un punto regular de la curva C de ecuación $(x,y,z)=(t^2-t,\ 2t+1,\ t^2-1)$; si lo es, dado que también es punto simple, hallar una ecuación del plano normal a C en P y encontrar la intersección de este plano con el eje z

$$\bar{\gamma}_{(t)}=(t^2-t,\ 2t+1,\ t^2-1)$$

$$P=\bar{\gamma}(t_0)=(0,\ 3,\ 0) \Rightarrow \begin{cases} t_0^2-t_0=0 \rightarrow t_0^2=t_0 \\ 2t_0+1=3 \rightarrow \boxed{t_0=1} \\ t_0^2-1=0 \end{cases}$$

verifica ✓

verifica

$\underbrace{\text{1 solo valor}}_{\text{punto simple}}$

$$\bar{\gamma}'_{(t)}=(2t-1,\ 2,\ 2t)$$

$$\bar{\gamma}'_{(1)}=(1,2,2)\neq(0,0,0) \rightarrow \boxed{P \text{ es punto regular}}$$

Plano normal: $(1,2,2)(x,y,z)=(1,2,2)(0,3,0)$

$$\rightarrow \boxed{x+2y+2z=6}$$

eje z $\Rightarrow x=0=y$

Plano normal $\cap$ eje z:

A

$$0+2\times0+2z=6 \rightarrow z=3$$

$$\boxed{A=(0,0,3)}$$

NOTA